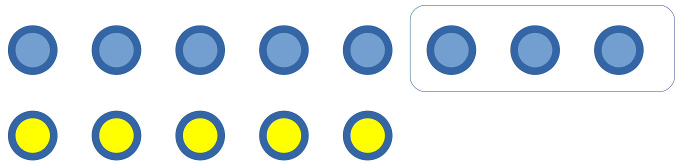
Pistes de travail et scénarios didactiques pour une compréhension et un apprentissage de la soustraction

1 – La soustraction est une opération complexe qui peut recouvrir 3 processus qui peuvent se résumer dans une forme écrite de type a-b

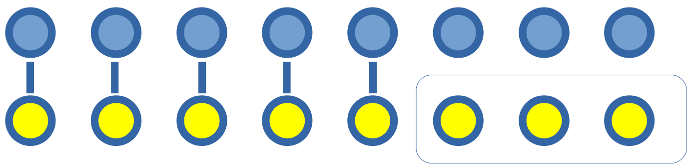
Modélisation des 3 processus de la soustraction à partir de l'exemple : 8-5

- écart entre 2 nombres : ce qu'il y a en plus ou en moins dans l'un des 2 nombres



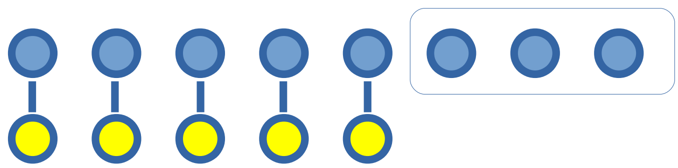
On cherche à connaitre combien il y a de 5 à 8

- complément à un nombre : ce qu'il faut ajouter pour égaliser les 2 nombres



On cherche à répondre au problème : 5 + … = 8

- reste après retrait du plus petit nombre au plus grand



On cherche à résoudre l'opération : 8 – 5 = ...

Selon le contexte et selon les nombres, l'opération mobilisée peut varier.

Ainsi pour connaitre l'écart en 9 et 14, on pourra chercher à ajouter 1 à 9 pour obtenir 10 puis 4 pour atteindre 14. En regroupant 1 et 4, on donne une valeur à la différence entre 9 et 14. Par contre, pour calculer l'écart en 997 et 2, on mettra en œuvre un calcul 997 – 2.

L'enjeu didactique est de permettre aux élèves de construire des procédures de calcul adaptées au contexte et aux nombres donnés. Mais il est aussi de permettre aux élèves de comprendre que ces différentes formes de calcul s'inscrivent dans le même registre opératoire. L'ambition est de permettre d'associer les différentes écritures d'une même opération : 8 – 5 = 3 <==> 8 – 3 = 5 <==> 3 + 5 = 8 <==> 5 + 3 = 8

Dans ce document, 4 axes thématiques sont développés sous forme de scénarios didactiques. L'ambition est de ne pas limiter l'apprentissage et la compréhension de la soustraction à un seul champ ou une seule technique.

La connaissance de la soustraction se construit dans la durée (sur plusieurs années). Elle sera d'autant plus solide que les élèves les auront construites et investies dans des approches et des tâches variées et complémentaires. Les élèves doivent faire la relation entre les notions de différence, d'écart voire de distance.

En ce sens, ce document a la prétention d'aider les équipes enseignantes à faire des choix de programmation du CP au CE2 voire au-delà. Toutes les propositions ne peuvent être abordées au cours d'une même année scolaire et certaines peuvent être revisitées chaque année.

On peut ajouter que les situations proposées peuvent s'intercaler. Par exemples, on peut travailler sur la résolution de problèmes et simultanément aborder des situations de complémentations. On peut aussi travailler des tâches de calcul par recherche du complément puis sur des résolutions de problèmes et revenir à des tâches de calcul par recherche du complément.

Pour chaque axe de travail, les situations sont développées de façon à développer des stratégies de calcul mental en s'appuyant sur l'écriture mais aussi à structurer des algorithmes de calcul pour appréhender un technique opératoire posée.
Ainsi, plusieurs techniques peuvent être enseignées et apprises en conservant un lien étroit avec les propriétés des nombres (principes décimal et positionnel) et de la soustraction.
En ce sens, c'est une réponse aux attendus du programme : « mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication. » tout en favorisant un usage et un renforcement des connaissances sur les entiers. L'enjeu comme pour l'addition est d'amener les élèves à raisonner à partir des connaissances acquises et en construction sans les engager dans des techniques dans lesquelles ils n'attribueraient plus de sens.

sommaire			
Axe	**Titre**	**Enjeux d'apprentissages**	**Procédure de calcul et technique opératoire associée**
1	Résolution de problèmes soustractifs	• Utiliser l'addition comme preuve pour justifier un écart • Comprendre la non commutativité de la soustraction • Faire évoluer les procédures de résolution à partir de corpus de problèmes récurrents (même contexte mais variables) • réinvestir les connaissances acquises et/ou en construction	Méthode de la fausse position : estimer un écart et ajuster à partir de la vérification par addition
2	Recherche du reste après retrait	• Utiliser et renforcer les connaissances sur les entiers pour gérer un retrait d'un nombre en échangeant (ex : 1 dizaine contre 10 unités) • Calculer en ligne et formaliser l'échange ou emprunt • Comprendre et utiliser un algorithme de calcul posé • Comprendre et utiliser la réversibilité de l'addition et de la soustraction	Méthode par emprunt ou échange
3	Complément et écart	• Compléter un nombre pour atteindre un autre nombre et identifier l'écart • Comprendre et utiliser la réversibilité de l'addition et de la soustraction	Technique par addition (addition à trou)
4	Règle cassée	Comprendre et utiliser la propriété de conservation des écarts Utiliser une procédure de conservation des écarts pour calculer des différences dans des calculs en ligne ou réfléchis	Technique par conservation des écarts (technique usuelle)

Situations 1

Ces situations s'appuient sur un corpus de problèmes dont la résolution peut être modélisée par une soustraction. Les enjeux sont définis ci-dessous.
Plusieurs corpus de problèmes sont proposés. Dans chaque corpus, on retrouve les mêmes contextes avec des données numériques modifiées et une complexification progressive. Ces problèmes récurrents peuvent être utilisés comme un fil rouge à un travail d'apprentissage de la soustraction pour construire et renforcer le sens de l'opération et pour réinvestir les connaissances acquises.

enjeux :

- amener les élèves à reconnaitre les caractéristiques de situations soustractives (problèmes qui se résolvent par une soustraction)
- amener les élèves à estimer un écart ou une différence puis utiliser l'addition comme preuve d'un résultat estimé
- comprendre la réversibilité de l'addition et de la soustraction ; si 32-18=14 alors 14+18=32 et si 14+18=32 alors 32-18=14
- exploiter les résultats observés pour approcher et atteindre la réponse exacte.

Cette étape va s'appuyer sur une série de problèmes qui seront repris lors de plusieurs séances en faisant varier les données numériques.

Les élèves vont devenir familiers avec les contextes présentés et pourront se centrer sur les procédures de résolution.

Séances 1
Comprendre les procédures utilisées par les élèves – On peut s'attendre à un usage important de représentations dessinées (mode iconique) voire de représentations en jouant la scène (mode énactif)

Présentation de plusieurs problèmes : on s'attache particulièrement à la reformulation pour aider tous les élèves à installer une représentation fonctionnelle du problème. Chaque élève s'engage dans des procédures de résolution personnelles.
Elles font l'objet d'une confrontation dans un temps de travail collectif.
L'analyse conduite pourra faire émerger :

- les différences entre dessins et schémas
- les types d'opérations utilisées et les stratégies de calcul (on peut voir des recours à l'addition pour compléter un nombre, des soustractions avec retrait d'un nombre…)
- les types d'outils ou de ressources mobilisés par les élèves (recours à des frises numériques, comptage sur les doigts, représentation des nombres…)

Corpus pour les séances 1

	A	B	C	D
1	Dans un parking il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?	Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 4 à l'école. Combien de billes a-t-il laissé à la maison ?	Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et de basket. Il y a 10 maillots de basket. Combien y a t-il de maillots de rugby ?	Un maçon a 58 briques, il en utilise 57. Combien en reste-t-il ?
	E	F	G	
1	Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 13 filles. Combien y a-t-il de garçons ?	Dans une boîte, j'ai 64 cubes, j'en sors 21. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?	La maitresse a apporté 27 boîtes de jus d'orange. Elle en distribue 23. Combien en reste-t-il ?	Dans un cahier de 92 pages, 23 pages ont été écrites. Combien reste t-il de pages pour écrire ?

Séances 2
Passer d'un mode iconique ou énactif à un mode symbolique

On va s'appuyer sur un second corpus de problèmes.
L'enjeu est d'amener les élèves à développer des procédures de résolution plus efficientes.
Passer du recours au dessin au schéma ou être capable d'utiliser les 2 représentations
Les contextes des problèmes sont repris avec des données numériques différentes.

L'enjeu est de familiariser les élèves avec des problèmes qui mobilisent une soustraction et d'en entrevoir des aspects différents.
Le problème A peut être résolu par calcul de l'écart entre 28 et 32.
Le problème D pourra appeler une opération de retrait (retirer 21 de 58).

	A	B	C	D
2	Dans un parking il y a 32 places. On a garé 28 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?	Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 45 à l'école. Combien en laisse-t-il à la maison ?	Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et de basket. Il y a 17 maillots de basket. Combien y a t-il de maillots de rugby ?	Un maçon a 58 briques, il en utilise 21. Combien en reste-t-il ?
	E	F	G	H
	Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 18 filles. Combien y a-t-il de garçons ?	Dans une boîte, j'ai 72 cubes, j'en sors 34. Combien en reste-t-il ?	La maitresse a apporté 27 boîtes de jus d'orange. Elle en distribue 12. Combien en reste-t-il ?	Dans un cahier de 92 pages, 23 pages ont été écrites. Combien reste t-il de pages pour écrire ?

Séances 3

prévoir un résultat (estimation) et utilisation de l’addition comme preuve du résultat puis comme modalité d’ajustement par approche successive

L’enjeu est d’amener les élèves à utiliser une opération (l’addition) qu’ils connaissent bien (ou mieux) en l’utilisant comme preuve d’un résultat annoncé et/ou estimé.
Dans cette séance, les élèves doivent prévoir (rapidement) le résultat à un problème présenté.
Pour la classe, il s’agit de rechercher un moyen de prouver la plausabilité du résultat (voire son exactitude).

Ex : pour le problème A : On cherche à calculer 32 - 18
estimation = 20 → 20 + 18 = 38 (c’est trop)
⇒ 15 → 15+ 18 = 33 (c’est encore trop mais juste de 1)
⇒ 14 → 14 + 18 = 32
⇒ 32-18=14

	A	B	C	D
	Dans un parking il y a 32 places. On a garé 18 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?	Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 19 à l’école. Combien en laisse-t-il à la maison ?	Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et de basket. Il y a 19 maillots de basket. Combien y a t-il de maillots de rugby ?	Un maçon a 58 briques, il en utilise 29. Combien en reste-t-il ?
3	E	F	G	H
	Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 9 filles. Combien y a-t-il de garçons ?	Dans la boîte, j’ai 70 cubes, j’en sors 23. Combien y a-t-il maintenant dans la boîte ?	La maitresse a apporté 27 boîtes de jus d’orange. Elle en distribue 18. Combien en reste-t-il ?	Dans un cahier de 92 pages, 23 pages ont été écrites. Combien reste t-il de pages pour écrire ?

On peut dans cette stratégie engager les élèves vers une stratégie de résolution par estimation et ajustement en fonction des résultats obtenus.

⇒ pour chaque problème → on émet une hypothèse de résultats
exemple pour le problème A : il reste 15 places

⇒ comment peut-on vérifier s’il reste effectivement 15 places → usage de l’addition pour prouver 18+15=33
⇒ ce n’est pas 15, mais on apprend aussi que c’est 1 de plus donc on peut essayer avec 14

On pourra engager les élèves dans des calculs soustractifs plus complexes
par exemple : calculer 272-159

estimation du résultat → utilisation de l’addition pour ajuster et prouver

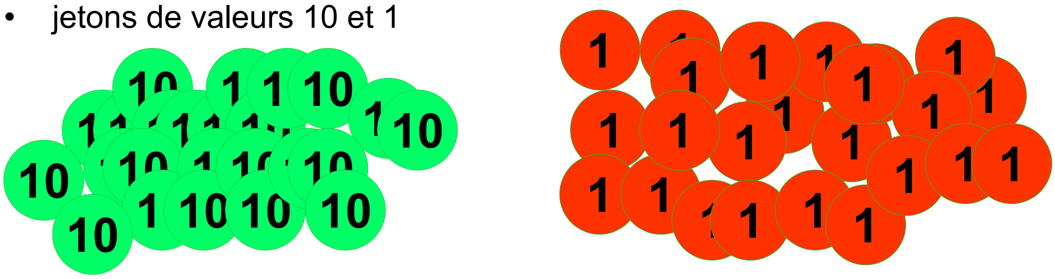
Situation 2
opérer un retrait et connaitre le reste

Enjeu : construire le principe de retrait d'un nombre pour modéliser la technique par fragmentation

<u>Obstacles prévisibles</u>
Les élèves peuvent être amenés à utiliser une propriété de l'addition, la commutativité, pour résoudre des soustractions impossibles
L'algorithme conventionnel amène les élèves à calculer en commençant par les unités. Cette approche semble contre-intuitive. Nous cherchons à leur permettre de calculer en commençant par les plus grandes unités de numération. Outre que cette approche correspond davantage à une démarche spontanée, elle permet, dès l'engagement dans le calcul, de s'approcher ou d'estimer l'ordre de grandeur du résultat.

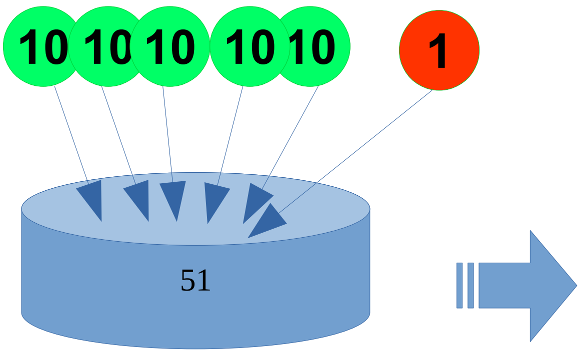
séances 1 (situation initiale) – travail collectif

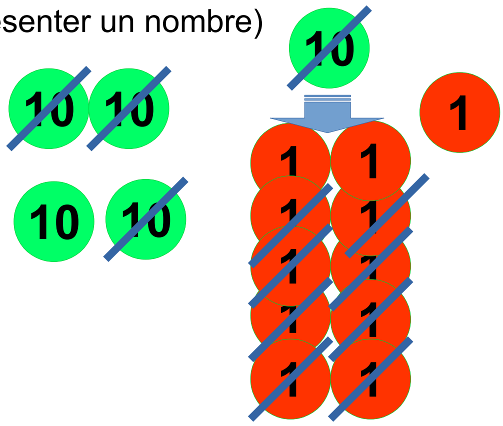
Matériel :
- une boite opaque
- jetons de valeurs 10 et 1



placer des jetons dans une boite pour construire (représenter un nombre)

ex : 51 →





Problème : retirer 38 de ce nombre

Les élèves ont 2 tâches:
1. trouver une solution pour reprendre les 8 unités de 38 alors qu'il n'y en a qu'une dans la boite
2. prévoir combien il reste dans la boite après le retrait

1. La solution consiste à échanger 1 jeton 10 par 10 jetons 1. ⇒ il est possible alors de reprendre 8 jetons 1 pour recomposer 38 (avec 3 jetons 10)
2. Les élèves doivent ensuite prévoir qu'il reste 2 jetons de valeur 1 dans les 10 échangés et 1 jeton de valeur 1 plus 1 jeton de valeur 10.

séances 2 – travail individuel

matériel

- jetons ou cartes 10 et 1
- enveloppes

Les élèves travaillent en binôme.
Ils reçoivent un nombre à construire avec des jetons 10 et des jetons 1. Ils doivent placer dans l'enveloppe les jetons (ou cartes) constituant le nombre.

Ils reçoivent ensuite un nombre qu'ils doivent former en reprenant les jetons (ou cartes) nécessaires dans l'enveloppe.

Ils doivent trouver une solution pour réussir à reprendre le nombre demandé.

Ils doivent aussi prévoir combien il va rester dans l'enveloppe après retrait du nombre demandé.

S'ils demandent à échanger, ils peuvent reprendre 1 jeton 10 et l'échanger contre 10 jetons 1 qu'ils replacent dans l'enveloppe.

Le matériel ne peut pas être sorti de l'enveloppe pour trouver le nombre restant. Les élèves doivent prévoir le nombre restant dans l'enveloppe.

Les jetons peuvent être sortis de l'enveloppe pour valider la proposition de résultat.

Séances 3 – travail collectif

recherche d'une modélisation mathématique : phase de recherche par les élèves

tâche donnée : produire une trace de la façon dont les binômes procèdent pour obtenir le résultat de la soustraction → attention la trace ne pourra pas dans un premier temps être commentée par leurs auteurs ⇒ elle devra être comprise par ceux qui ne l'ont pas : les autres élèves de la classe.
Ces derniers devront comprendre comment les auteurs ont pensé / raisonné. (tâche de communication)

exemples
51 – 38
⇒ 40 + 11 – 38
⇒ 40 – 30 + 11 – 8

51-38=21-8=10+10+1-8=10+2+1=13
ou
51-38=21-8=20-7=10+10-7=13

51-38
⇒ 40 + 10 + 1 – 30 – 8
⇒ 40 + 3 – 30 = 13

Il s’agit de modéliser l’opération de retrait, et d’échange le cas échéant, en rendant compte des opérations successives. L’enjeu est de préserver la logique opératoire tout en conservant le lien avec le raisonnement qui est construit à partir des propriétés des nombres.

enjeu : modéliser les procédures élaborées par les élèves
Ces procédures s’appuient sur un usage des propriétés des entiers et de la numération décimale et des échanges effectués pour rendre possible une soustraction.

Les opérations sont dans un premier temps traitées en ligne.

⇒ à partir des modélisations en ligne on peut proposer une technique posée qui s’appuie sur la fragmentation des unités de numérations supérieures. On peut envisager (comme pour l’addition) des algorithmes progressifs.

→ voir vidéos CE2 Champagne

Propositions de calculs posés et d’algorithmes progressifs

	6	*10*
	~~8~~	2
-	3	7
	3	5

Situation 3
calculer un écart (complément d'un nombre pour obtenir un autre nombre)

Séances 1 – situation initiale

Soit 2 nombres inscrits au tableau

ex : 73 et 49

On constate une différence entre ces deux nombres et on repère le plus grand (donc le plus petit).
Tâche : ajouter au plus petit un nombre pour qu'il soit égal au plus grand nombre

72 | 49

Que faut-il ajouter à 49 pour avoir le même nombre
sur les deux ardoises ?

On peut envisager 2 options :

1 – Compléter les dizaines puis ajuster : $49 + \underbrace{10 + 10 + 1 + 2}_{23}$ // $49 + \underbrace{20 + 1 + 2}_{23}$ // $49 + \underbrace{20 + 3}_{23}$

2 – Compléter à la dizaine supérieure : $49 + \underbrace{1 + 10 + 10 + 2}_{23}$ // $49 + \underbrace{1 + 20 + 2}_{23}$

Ressource (possible) pour les élèves

utiliser des cartes 1 / 2 / 5 / 10
⇒ ajouter au nombre le plus petit les cartes qui permettent d'obtenir un nombre égal au plus grand
⇒ l'écart correspond à la somme des cartes ajoutées

Séances 2

modélisation sous forme d'une addition en ligne

49 + ,,, = 72

enjeux =
+ identifier les procédures des élèves et les modéliser
+ laisser apparaitre les essais successifs

modélisations posées

$$\begin{array}{ccc} & 4 & 9 \\ + & \dots. & \dots. \\ \hline & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 4 & 9 \\ + & 2 & 0 \\ + & & 1 \\ + & & 2 \\ \hline & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 \\ + & 1 & 0 \\ + & & 1 \\ + & & 2 \\ \hline & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 4 & 9 \\ + & & 1 \\ + & 2 & 0 \\ + & & 2 \\ \hline & 7 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 4 & 9 \\ + & 2 & 3 \\ \hline & 7 & 2 \end{array}$$

Situation 4
utiliser le principe de la conservation des écarts
mesurer avec une règle cassée

La propriété de conservation des écarts est utilisée dans la technique usuelle enseignée et présentée dans de nombreux manuels.
Elle ne mobilise pas le plus souvent un raisonnement des élèves qui font usage d'un algorithme sans en comprendre le fondement.

Pour autant, elle peut être utilisée pour simplifier des calculs soustractifs :
exemple :

72 – 49 = 72+1 – 49+1 = 73 – 50

et 73-50 est plus facile à calculer que 72-49

Deux scénarios sont possibles :

- situation de la règle cassée

voir intervention de Joël Briand
référence :
http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/manipulation-nombres-decimaux-aux-cycles-1-2-et-3-1/lenseignement-des-nombres-decimaux-a-lecole-primaire-et-au-college-questions-de-formation-obstacles-choix-didactiques/enseigner-la-droite-numerique

- situation des deux récipients

Principe : deux récipients (A et B) contiennent deux quantités différentes de même objets (A>b)
⇒ combien y en a t-il de plus dans A ?
⇒ si je rajoute n éléments dans A et n éléments dans A → Combien y a t-il d'éléments de plus dans A

Proposition de scénario didactique avec la situation de la règle cassée

<u>1 – Mesurer des segments à l'aide d'une règle qui commence à 0</u>
→ but : reproduire des bandes de mêmes longueurs que les segments tracés sur une feuille
→ la mesure et le découpage des bandes de longueurs sont effectués à distance de la mesure des segments (installer 2 endroits dans la classe)

<u>2 – Le but de la tâche pour les élèves est le même</u>
→ prendre une mesure d'un segment à l'aide de la règle usuelle (début à 0)
→ reproduire une bande de même longueur à l'aide d'une règle « cassée » (qui ne commence pas à 0)

⇒ enjeu = mettre en relation la mesure initiale avec l'écart entre deux nombres
ex : si le segment mesure 9 u → cela correspond à la mesure de l'écart entre 27 et 36
9=36-27

variable

- prendre la mesure d'un segment avec une règle graduée

⇒ reproduire une bande de même longueur à l'aide d'une règle usuelle (début à 0)

<u>3 – situations de communication</u>

1/2 élèves donnent une mesure d'un segment
> les autres élèves produisent une bande de même longueur à l'aide d'une règle cassée

⇒ identification des soustractions qui correspondent à la mesure attendue
⇒ identification des soustractions les plus faciles à effectuer

attendu = repérer que la mesure est plus facile à effectuer quand le plus petit nombre est un multiple de 10

ex : 85-60 et plus facile que 83-58 ou que 88-63

4 – prendre la mesure de segments à l'aide de règles cassées
⇒ valider la mesure à l'aide de la règle usuelle

4bis – prendre la mesure de bandes prédécoupées à l'aide d'une règle cassée
⇒ identifier les prises de mesures les plus simples à calculer